CADERNO DE FÍSICA DA UEFS, 03 (02): 15-35, 2005

A TOPOLOGIA: CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS E IMPLICAÇÕES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

Carloman Carlos Borges

NEMOC - Núcleo de Educação Matemática Omar Catunda - UEFS

1. O Objetivo da Topologia

Consideremos as seguintes perguntas:

- Qual é o comprimento desta sala de aula?
- Qual o ângulo feito por aquelas duas paredes?
- Qual área desta sala?
- Qual à distância do centro da cidade para a Universidade de Feira?
- Aonde vamos hoje à noite?
- Você é vizinho de Paulo?
- Maria derramou o café fora da xícara?
- José se encontra separando de Maria?
- Ou ele está entre Maria e João?
- O móvel já está dentro da sala?
- Qual a divisa (fronteira) entre Sergipe e Bahia?
- A porta está aberta ou fechada?

Agora tentemos "comparar" as quatro primeiras perguntas acima com as demais. Desta comparação podemos chegar a muitas conclusões; naturalmente, porém, vamos nos restringir àquela que nos interessa. Para responder às quatro primeiras perguntas mencionadas, você pode fazê-lo por intermédio de um número, de uma quantidade. Nesse sentido, chamemos a essas quatro perguntas de "perguntas quantitativas". E quanto às demais perguntas? Obviamente, elas poderão ser perfeitamente respondidas sem o emprego de qualquer número para representar uma quantidade. Nesse sentido, chamemos a essas perguntas de "perguntas qualitativas". Entre os dois grupos de perguntas acima, há, então uma diferença notável: o primeiro grupo está relacionado à quantidade do objeto, do fenômeno, etc. enquanto o segundo grupo se relaciona com a qualidade.

Os numerosos objetos e fenômenos que nos cercam estão em permanente movimento, mudança, etc. Apesar disto, aos nossos olhos eles se distinguem uns dos outros. Esta discriminação é devida ao seu duplo aspecto: quantitativo e qualitativo. Aparentemente há uma diferença, uma quase oposição entre esses dois aspectos, porém, entre eles existe uma grande unidade indissolúvel.

Qualquer Ciência estuda a realidade. A riqueza inesgotável da realidade justifica o aparecimento de numerosas ciências e é responsável pelo seu desenvolvimento.

A matemática não é uma exceção à regra acima, pois, obviamente, ela é uma ciência. Algumas pessoas ingênuas consideradas sabidas costumam afirmar que a matemática estuda somente o aspecto quantitativo das coisas, dos fenômenos, etc. Segundo essas pessoas, a Matemática é a ciência da "quantidade", isto é a ciência do "número". (Observem só a confusão que elas fazem entre quantidade e número). A afirmação de que a matemática estuda apenas o aspecto quantitativo dos objetos, dos fenômenos, processos, etc. será verdadeira? O desenvolvimento desta ciência mostra que não. Há na matemática, diversos ramos independentes, por assim dizer, do número e das noções de quantidade. Um exemplo conhecido pelos alunos do Ensino Médio ou da graduação: A Geometria Projetiva ou Descritiva. Mais diante tomaremos contato com outro ramo do conhecimento matemático que é "mais qualitativo" do que quantitativo.

Retornaremos, agora, aos dois grupos de perguntas propostas acima. Você conhece alguma "parte da Matemática" que estuda o primeiro grupo, dando-lhe respostas satisfatórias? A mesma pergunta para o segundo grupo.

A primeira pergunta será, com certeza, respondida prontamente por você: "A Geometria que estudei nos primeiros anos escolares". Quanto a segunda podemos lhe assegurar que existe uma "parte" da Matemática, na qual você encontrará repostas satisfatórias envolvendo os conceitos sublinhados no segundo grupo de perguntas acima. Esta "parte" da Matemática chama-se Topologia. Portanto, noções de vizinhança, fora, dentro, interior-exterior, aberto-fechado, longe-perto, separado-unido, contínuo-descontínuo, alto-baixo, são noções topológicas. Claramente, estas noções costumam vir associadas à outras tais como: adjacências (proximidade), ordem, etc., as quais, igualmente se incluem no rol das noções topológicas. Quando eu digo: “estou junto com você”, emprego, por assim dizer, uma linguagem topológica ou seja, nesta frase, emprego noções topológicas.

A experiência nos coloca em contacto ora com corpos duros, ora com corpos macios os quais, quando submetidos à forças suficientes podem ter a sua forma ou tamanho alterados. Um corpo duro pode ser idealmente transformado em um corpo rígido, isto é, um corpo que não sofre qualquer mudança no seu tamanho ou na sua forma quando em movimento. Dizemos, então, que a forma e o tamanho de um corpo rígido são invariantes quando submetido ao movimento ou, em linguagem mais sofisticada: as propriedades métricas de um corpo rígido são invariantes sob a transformação do movimento. Na Geometria de Euclides nós estudamos as propriedades métricas dos corpos rígidos quando submetidos a deslocamentos tais como translação e rotação. A Geometria Euclidiana estuda, pois, aquelas propriedades das figuras que permanecem invariantes nos deslocamentos. Consideremos o quadrado abaixo:

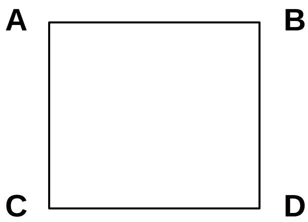

Figura 1

Rotulemos algumas propriedades dessa figura:

1. O lado AB mede 5 cm.
2. Seus quatros lados são iguais.
3. A distância do lado AC à margem esquerda é de 5,5 cm.
4. Todos os seus ângulos são iguais.
5. A figura divide o plano em três conjuntos de pontos:
   a) os pontos que estão dentro dela;
   b) os pontos que estão sobre as suas quatro linhas;
   c) os pontos que estão fora dela.

De todas as propriedades acima mencionadas apenas a última não é estudada na Geometria de Euclides; as demais se caracterizam por suas propriedades métricas e, pertencem a essa Geometria. A propriedade assinalada por último não é uma propriedade métrica, ela não pode ser medida, não é associada a nenhum número; é uma “propriedade qualitativa” e, por conseguinte, pertence à Topologia.

Consideremos, agora, as duas figuras abaixo que se seguem;

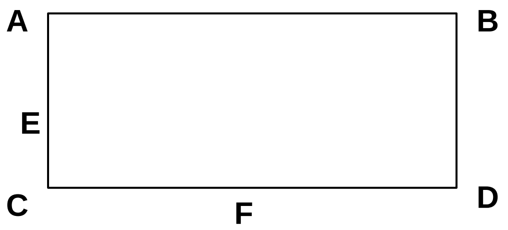

Figura 2

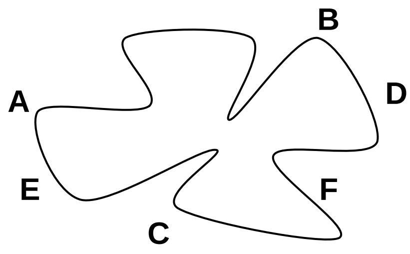

Figura 3

Qualquer pessoa de “bom senso” dirá imediatamente: não há nenhuma coisa em comum a essas duas figuras. A segunda é uma “deformação” da primeira e pode lembrar tudo, menos o retângulo da sua esquerda. No entanto, um exame mais atento revela o seguinte: apesar de toda a “deformação” apresentada pela segunda figura em relação à primeira, algumas propriedades permaneceram invariantes pela distorção. Quais são elas? Observe que ambas as figuras, os pontos E, D e F permanecem, respectivamente, entre os pontos A e C, B e F, C e D. Apesar, pois, de toda a sua distorção, a figura da direita conserva, para os pontos citados, mesma ordem dentro da qual eles se apresentam na figura a sua esquerda. Aqui, estamos na presença de uma transformação topológica, uma vez que a transformação que levou a figura retangular à da direita conservou a ordem dos pontos citados, embora não conservado a retidão dos lados e os ângulos tenham sofrido alterações profundas.

Consideremos outra transformação, aquela que transforma um círculo em um oito. Esta transformação é topológica? Observe que podemos ter no círculo dois pontos distintos A e B, os quais, após a transformação, podem se apresentar no oito, em contacto; logo, trata-se de uma transformação que não transforma todos os pontos distintos do círculo em pontos distintos na segunda figura. Portanto, não é uma transformação topológica. Imaginemos uma bola de couro e recalquemos uma parte de sua superfície. Pode-se apresentar duas situações:

a) O recalque provoca na superfície apenas um pequeno rebaixamento. Não há rompimento do couro.
b) O recalque provoca na superfície um buraco; o couro foi rompido

Qual das duas transformações acima, podemos considerar como topológica?

Na transformação (a) permanecem invariantes duas propriedades topológicas, quais sejam, o interior e o exterior, enquanto que na transformação (b) não permanece a conservação acima mencionada. Nesta última transformação, pontos que eram vizinhos e permaneceram vizinhos em (a) simplesmente deixam de ser vizinhos. Portanto, a vizinhança não é conservada, e conseqüentemente a transformação (b) não é uma transformação topológica.

Analisando-se os exemplos acima, podemos concluir: em uma transformação topológica não há nem "fusões" (se houvesse, pontos distintos se transformariam em pontos não distintos, destruindo, assim, a vizinhança entre os mesmos), nem rompimentos (se tal ocorresse, propriedades como interior e exterior seriam destruídas).

A Topologia é um ramo bem recente da Geometria. Pelos exemplos dados acima, conclui-se que ela se preocupa com o aspecto qualitativo dos objetos e nesse sentido ela independe do número.

Precisemos ainda mais o que quer dizer transformação topológica. Sejam duas figuras A e B; a transformação de A em B é topológica quando duas condições são preenchidas.

a) a cada ponto a de A corresponde um só ponto *b* de B; a recíproca também é verdadeira. Como vemos, temos aí uma correspondência biunívoca;
b) a transformação topológica é contínua nos dois sentidos; assim, dados dois pontos *a* e *a'* de A se, por um movimento de a sua distância ao ponto *a'* tender a zero, igualmente tende a zero a distância entre os dois pontos correspondentes *b* e *b'* de B; a recíproca é verdadeira. Assim, exemplificando, se dobrarmos um pedaço de arame sem rompê-lo, a vizinhança entre pontos do arame antes de ser dobrado é preservada no arame dobrado; igualmente, ao desdobrarmos o mesmo arame (esta seria a transformação inversa da primeira), pontos vizinhos no arame dobrado permanecerão vizinhos no arame distendido

Qualquer propriedade da figura A que é conservada em sua transformada B, por intermédio de uma transformação topológica, damos o nome de propriedade topológica. Portanto, a Topologia tem por objeto o estudo das propriedades topológicas das figuras.

Observamos que o tamanho e a forma não são propriedades topológicas. Alguns autores chamam a Topologia pitorescamente de: "Geometria da borracha"

"Geometria Elástica", "Geometria das Deformações", etc. É interessante observar que, as propriedades topológicas de uma figura são preservadas mesmo quando está submetida a alterações na sua forma e tamanho, isto é quando a figura sob transformação perde muitas de suas outras propriedades geométrica.

2. Curvas

Considerando intuitivo o conceito de <u>curva</u>, consideremos, por exemplo a hipérbole

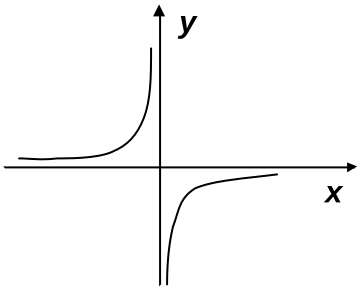

Figura 4

ela possui dois ramos (duas "partes"); porém, um círculo possui só uma parte e, por isso, é uma <u>curva</u> <u>conexa</u>. Exemplo de uma curva conexa é a <u>lemniscata</u>, a qual se assemelha a forma de gravata "borboleta". Há alguma diferença entre um círculo e uma lemniscata? Há várias, porém, aquela que é do nosso interesse consiste no seguinte: esta última curva se intersecta a si mesma, enquanto o círculo não se intersecta a si mesmo. Assim, definimos: uma curva conexa que não se intersecta a si mesma é chamada de <u>curva</u> simples. Porém, entre as curvas simples, temos, exemplificando, o círculo, a elipse, a parábola.

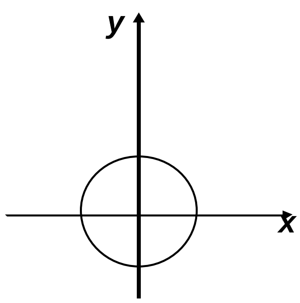

Figura 5

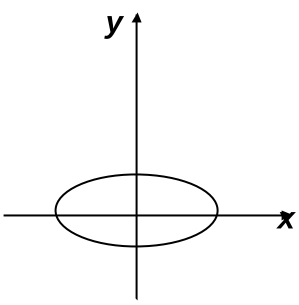

Figura 6

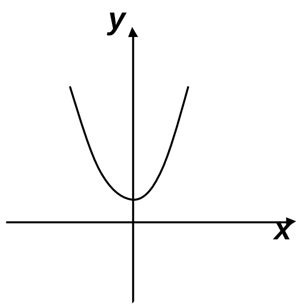

Figura 7

Há alguma diferença entre as duas primeiras e a última? A diferença que nos interessa é a seguinte: as duas primeiras são curvas fechadas, enquanto a parábola não o é. Definamos melhor uma curva fechada: Sejam duas funções contínuas. $x = f(t)$ e $y = g(t)$, ambas definidas no intervalo $a \leq t \leq b$; dizemos que estas duas funções contínuas definem uma curva fechada, quando:

$$f(a) = f(b) \text{ e } g(a) = g(b)$$

Relacionado ao conceito de curva fechada, pode ser citado o teorema de Jordan (Marie Ennemond Camille, 1838-1922): "Uma curva simples e fechada C de um plano, divide-o em dois domínios: um interior e um exterior".

Desde os primeiros anos escolares estamos acostumados com a definição de círculo: "lugar geométrico de todos os pontos desse mesmo plano que são eqüidistantes de um ponto dado nesse plano". O que caracteriza esta definição é uma mesma distância, isto é, a distância de qualquer ponto dessa curva a um ponto fixo dado do mesmo plano possui sempre o mesmo tamanho. Ora, distância, comprimento podem ser alterados sob uma transformação topológica e, para serem bem caracterizados necessitam de uma medida e, portanto são propriedades métricas. A definição dada é uma definição métrica. Como é a definição topológica do círculo? Ora, do ponto de vista da Topologia, esta figura não pode ser definida com o emprego de igual comprimento ou outros conceitos equivalentes uma vez que estes não pertencem a essa ciência; a definição topológica em apreço há de empregar propriedades topológicas do círculo. Quais são essas propriedades? Apenas duas: interior e exterior (fora e dentro); logo, o círculo se caracteriza por dividir todo o plano em duas partes: uma que lhe é interior e outra que lhe é exterior (isto é, uma parte que está "dentro" dele e outra que está "fora"). A abrangência de uma tal definição é indiscutível pois podemos afirmar que o círculo é, topologicamente equivalente a qualquer outra curva, a qual possua essa propriedade: dividir todo o plano em duas partes: interior e exterior, não importando o grau de deformação da figura. São topologicamente equivalentes, por exemplo, o círculo, o quadrado, o retângulo, o losângulo, etc. Se estas figuras são topologicamente equivalentes, isto significa que uma qualquer delas pode se converter em outra qualquer, sob uma transformação topológica. Dizemos, também, que elas são homeomorfas. Dentro desta mesma linha de raciocínio, podemos acrescentar que um círculo não é homeomorfo a um segmento de reta, uma coroa circular (conjunto de pontos compreendidos entre dois círculos concêntricos) não é homeomorfo ao interior de um círculo.

Seja E um espaço topológico (ainda não o definimos e o faremos em outra oportunidade). A um subconjunto de E. Se A é homeomorfo a um segmento de reta, dizemos que A é uma curva simples de Jordan; se A é homeomorfo a um círculo, dizemos que A é uma curva fechada simples de Jordan. O homeomorfismo é uma relação de equivalência (isto é, a relação R em um conjunto A possui as propriedades de ser reflexiva, simétrica e transitiva); fundamental na Topologia Geral.

3. Uma Brincadeira Topológica com as Letras do Alfabeto

Consideremos as nossas conhecidas letras:

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, X, W, Y, Z.

Suponhamos que elas sejam elásticas e suficientemente deformáveis para a brincadeira que vem a seguir. Nós queremos verificar quais os grupos de letras topologicamente equivalentes. Por exemplo, as letras

T e Y

são topologicamente equivalentes. Porque? Porque eu posso transformar uma na outra, sem rompimentos (isto violaria a condição (b) da definição de transformação topológica dada na página 19) e sem coincidência de dois pontos distintos (o que violaria a condição (a) da mesma definição). Assim para transformar o Y no T, basta fazer descer dois “braços” oblíquos. A transformação de T em Y, também pode ser feita facilmente. Existem outras letras topologicamente equivalentes as duas citadas? Todas as seguintes são topologicamente equivalentes às letras T e Y:

E, F, G

Assim, temos o primeiro grupo no qual as letras são topologicamente equivalentes:

E, F, G, T, Y (1)

Com um pouco de atenção e paciência, podem ser formados os demais grupos:

C, I, J, L, M, N, S, U, V, Z, W (2)

D, O (3)

K, X (4)

H (5)

A, R (6)

B (7)

P (8)

Q (9)

Você deverá exercitar-se também em responder corretamente à perguntas desse tipo:

a) Porque a letra G não é equivalente topologicamente à letra C, por exemplo?
b) A mesma pergunta pode ser formulada com relação as letras O e I.

Para a transformação de G em C, seria necessário "amassar" um pouco aquela letra e isto faria com que pontos distintos de G, coincidissem após o "amassamento", o que não é permitido.

Os grupos de letras homeomorfas acima, podem, ainda, ser ampliados se considerarmos o homeomorfismo dessas letras com outras figuras. Assim, por exemplo, podemos considerar os seguintes grupos:

H, I

8, B

4. Alguns Problemas de Natureza Topológica

A Topologia Geral é um dos mais recentes desenvolvimentos da Matemática, porém, suas idéias remontam à antiguidade.

O desenvolvimento é a unidade entre a continuidade e a descontinuidade; aquela primeira significa ou representa a fase assim dita da acumulação quantitativa; essas acumulações se processam lentamente; e em certo ponto dessa acumulação se verifica um rompimento, um salto qualitativo, uma descontinuidade, surgindo então, algo de novo no processo ou objeto no qual aquelas alterações quantitativas foram suficientes para provocar o salto qualitativo. Toda a história da ciência comprova essa tese: a evolução científica é feita baseada na interdependência entre a continuidade, acúmulo de informações e as intermitências, os saltos qualitativos, as denominadas revoluções científicas. Thomas Kuhn, físico, filósofo e historiador da ciência, em seu livro A Estrutura das Revoluções Científicas, faz uma análise interessante – embora parcial – desse processo. Essa mesma unidade – entre continuidade e descontinuidade – se verifica não somente nas propriedades corpusculares (descontínuas) e ondulatórias (contínuas) da matéria mas, igualmente, no próprio conhecimento humano: por um lado, temos o conhecimento sensorial, o conhecimento que dirige o senso comum e por outro lado, o conhecimento lógico, científico que representa uma etapa qualitativamente nova em relação ao senso comum.

O trecho abaixo é extraído do livro: A Matemática: seu conteúdo, métodos e significado, escrito por A. D. Aleksandrov e outros matemáticos soviéticos.[1] “Adjacência é uma propriedade notável dos corpos denominados geométricos... Estas são as primeiras palavras de I. N. Lobachevski no primeiro capítulo de seu livro Novos Elementos de Geometria... Os conceitos de adjacência, vizinhança do infinitamente próximo, assim como o conceito de dissecção de um corpo, que até certo ponto é dual dos primeiros, são os que Lobachevski coloca na base de toda a estrutura da geometria e são, também os conceitos fundamentais da topologia em toda a extensão em que no presente compreendemos essa disciplina”.

Contribuições decisivas ao desenvolvimento dessa teoria foram dadas por Riemann, Poincaré, etc.[2]

Aqui, estamos interessados em mencionar algumas “situações topológicas”, das quais seja possível, pelo menos pressentir a importância dessa disciplina.

<u>1º problema: As pontes de Königsberg</u>: esta cidade, atualmente chamada Kaliningrad, pertencente à República Democrática Alemã, é cortada por um rio que tem uma ilha; sete pontes ligavam a cidade à ilha, conforme figura abaixo:

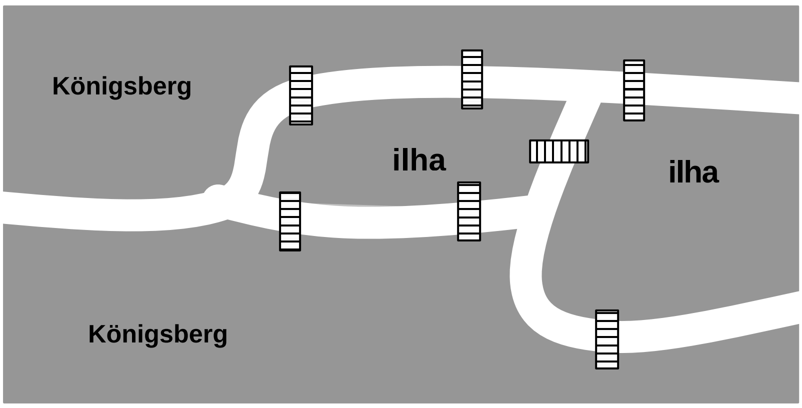

Figura 8

[1] Vide bibliografia *in fine*

[2] Idem

Este problema consiste no seguinte: efetuar um passeio pela cidade e cruzar todas as pontes, uma única vez. A resposta é; não, não é possível tal passeio com a restrição mencionada. Este problema foi assim resolvido pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783).

2º problema: Fazer a ligação de gás, água e eletricidade para três casas, de maneira que as instalações não se cruzem. Resposta: não é possível tal ligação com a restrição (as linhas não se cruzam).

3º problema: das quatro cores: Quantas cores são precisas para colorir um mapa, com qualquer número de países, de maneira que nenhum país tenha a mesma cor daquele que lhe for fronteiriço? No plano todo mapa pode ser colorido com 5 cores – isto já foi demonstrado. Em 1976, por intermédio de computadores, foi provado que quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa.

4º problema: Considere um desses mapas geográficos; uma simples inspeção visual, mostra que um ponto fronteiriço qualquer pode ser, no máximo, o ponto de encontro de dois países. É possível, também, imaginar a seguinte situação: um mapa com três países e um mais pontos nos quais os três países se encontram. Naturalmente que este(s) ponto(s) deve(m) estar na fronteira comum aos três países. Você é capaz dessa imaginação?

O quarto problema consiste no seguinte: seja um mapa de três países com a seguinte particularidade: em qualquer ponto ao largo da fronteira de cada país os três países se encontram.

Este problema foi imaginado e resolvido pelo matemático e lógico holandês Luitzen Egbertus Jan BROUWER, o qual é responsável por importantes contribuições à Topologia e à Lógica. Adepto da escola "intuicionista" ou "construtivista", Brouwer rejeita o princípio aristotélico do terceiro excluído – apenas válido para conjuntos finitos; rejeita, igualmente, o infinito acabado, isto é, a tomada de consciência de todos os elementos de um conjunto infinito, aceitando, apenas, o infinito potencial, isto é, a possibilidade, no plano mental da repetição de uma mesma operação ilimitadas vezes; por exemplo, é sempre possível, no plano mental, juntar uma unidade a um número natural qualquer e, daí, chegar-se ao imediatamente seguinte. As conseqüências dessas idéias de Brouwer (1881 – 1966) são profundas; elas sugerem, inicialmente, a possibilidade de criação de uma lógica com mais de dois valores; por outro lado, a aceitação de suas idéias mutilariam profundamente a Matemática atual, a começar pela rejeição de grande parte da Teoria dos Conjuntos de Cantor; as chamadas "demonstrações por absurdo" deveriam ser também rejeitados.

5º problema: seja um poliedro simples (em um poliedro simples podemos deformar sua superfície de uma maneira contínua até transformá-la na superfície de uma esfera, tetraedro, cubo, pirâmide, etc.) no qual convencionamos;

V: soma do número de vértices;
F: soma do número de faces;
A: soma do número de arestas

Suponhamos que submetemos este poliedro e uma transformação topológica: torcemos suas arestas, dobramos suas faces, enfim, fazemos tudo aquilo permitido em uma transformação topológica. Problema: quais as propriedades que permanecem invariantes quando um poliedro simples é submetido a uma transformação topológica?

A resposta é dada pelo Teorema de Descartes – Euler: em todo poliedro simples se verifica a seguinte relação:

$$V + F = A + 2$$

6º problema: considere uma folha de papel retangular, como mostrado na figura abaixo:

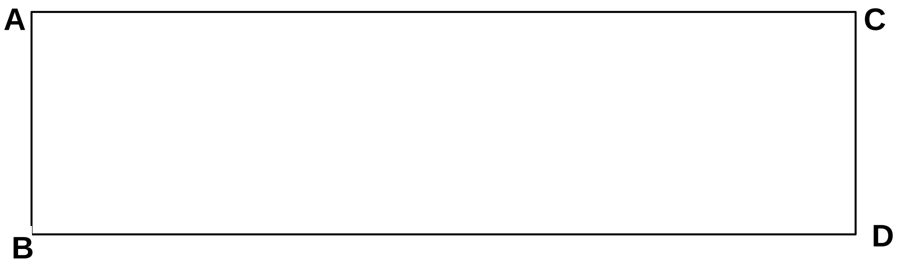

Figura 9

Problema: é possível com essa folha retangular de papel – que é uma superfície de duas faces – fazer uma outra superfície que apresenta apenas uma só face?

Não procure responder baseado apenas no bom senso pois, então, a sua resposta será negativa e, por conseguinte, errada. A resposta à pergunta colocada pelo problema acima é positiva. Você mesmo poderá verificar construindo a faixa de Mobius (August Ferdinand, 1790 – 1868) da seguinte maneira: na faixa ABCD, dê-lhe uma meia torção e una as extremidades de maneira que C coincida com B e D com A. Você acaba de fazer a faixa de Mobius, exemplo de uma superfície de apenas uma face. Não acredita? Então, na faixa de Mobius, trace uma reta pelo seu centro até o ponto de partida; em seguida separe as extremidades da faixa para comprovar que os dois lados estão riscados pela reta.

7º problema: vista-se com um casaco deixando-o desabotoado e por debaixo deste, esteja com um colete. Problema: é possível tirar o colete sem tirar o casaco? Esta operação tem de ser feita com a restrição de nunca, durante a retirada do colete, seus braços saírem das mangas do casaco.

8º problema: seja um cubo oco feito de um material elástico, como borracha, por exemplo. Como sabemos, o cubo é limitado por seis faces, doze arestas e oito vértices. Enchendo esse cubo até ele se "transformar" numa esfera, então, as faces do cubo, suas arestas e seus vértices são, respectivamente, "transformados" em quê?

9º problema: será que é possível fazer um buraco em uma folha de papel ofício ou mesmo do tamanho de uma página de um de nosso livros escolares, tal que um homem possa passar por ele? A reposta é positiva. A resolução é fácil; inicialmente pegue a folha de papel e dobre-a ao meio. Corte o papel dobrado seguindo as linhas da figura; agora desdobre a folha e verifique se o buraco feito não lhe cabe inteiramente, deixando você passar inteiramente por ele.

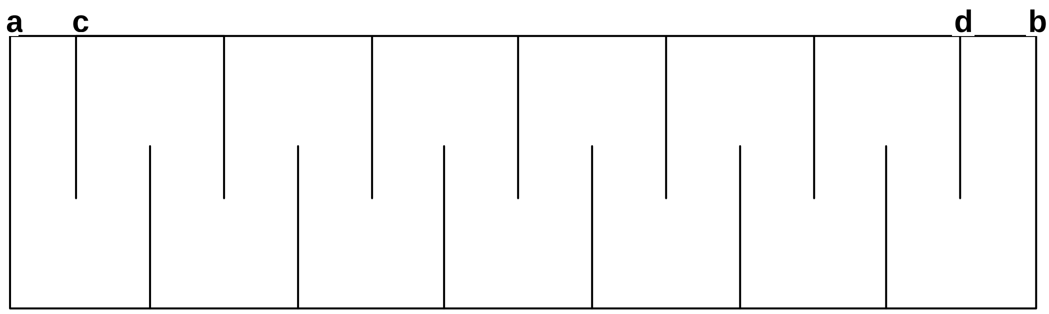

Figura 10

Não se espante pois a mesma coisa pode ser feita usando-se tão somente um pedaço de papel do tamanho de um selo de correio; para isto basta apenas aumentar suficientemente a quantidade de cortes.

A idéia subjacente ao exercício acima é a seguinte: uma superfície pode ser recortada até aproximar-se de uma linha, isto é, temos uma linha que recobre um quadrado, por exemplo. Esta linha descoberta é do matemático e lógico italiano Giuseppe PEANO (1858 – 1932).

Naturalmente que o processo acima de recortar a superfície até fazê-la aproximar-se de uma linha, é um processo infinito.

Os problemas apresentados acima mostram que a Topologia é um ramo matemático qualitativo, uma disciplina "que trata de coisas que podem ser expressas sem medida ou número" para usar uma frase do matemático alemão Félix HAUSDOFF (1868 - 1942), o qual deu importantes contribuições a essa disciplina.

5. Qualidade - Quantidade

Nas páginas anteriores tentamos apresentar uma introdução intuitiva a esse ramo fascinante da Matemática que é chamado de Topologia. Um tratamento bastante intuitivo do mesmo tema, você encontrará em Poincaré (1970)[3].

Vejamos algumas idéias desse eminente matemático francês, expostas na obra citada. "De um modo geral os geômetras distinguem duas espécies de geometrias: uma fundada na noção de distância, que eles chamam de geometria métrica e na qual duas figuras são consideradas como equivalentes quando elas são iguais no sentido em que os matemáticos dão a esta palavra; a outra espécie de geometria é a projetiva, fundada sobre a noção de linha reta; para que duas figuras sejam consideradas como equivalentes não é necessário que elas sejam iguais, é suficiente que se possa passar de uma para a outra por intermédio de uma transformação projetiva, isto é, que uma seja a perspectiva da outra... Porém, existe uma terceira geometria da qual a quantidade é completamente afastada e que é puramente qualitativa; esta geometria é a Analysis situs"[4].

Sobre as relações entre o quantitativo e qualitativo vamos reproduzir a transcrição abaixo, extraída do libro Stabilité Structurelle et Morphogenese, do matemático francês René Thom (1977):

> *"O emprego do termo qualitativo em Ciência – sobretudo em Física – tem um aspecto pejorativo; e um físico me chamou a atenção – com veemência – para a palavra de Rutherford: "o acordo qualitativo de uma teoria com a experiência não exprime senão um acordo quantitativo grosseiro (Qualitative is nothing but poor quantitative)". Ora – continua René Thom – Consideremos o exemplo seguinte: suponhamos que no estudo experimental de um fenômeno* q*, um teórico, dispõe de duas teorias* q_1, q_2 *cada uma das teorias, respectivamente, são aproximadas pelas curvas* $y = g_1(x)$ *e* $y = g_2(x)$*; nenhuma dessas curvas apresenta adaptação à curva empírica* $y = g(x)$ *(ver figura 11); a curva* $y = g_1(x)$ *apresenta uma adaptação quantitativamente melhor, no sentido de que,*

[3] POINCARÉ, Henri. Dernierés Peusés. Paris, Flamarion, 1913

[4] Nome pelo qual era conhecida a disciplina que hoje chamamos de Topologia.

y

sobre o intervalo considerando, a integral da diferença $\int |\mathbf{g}-\mathbf{g}_1|_\mathbf{r}\,\mathbf{dx}$ *é menor que* $\int |\mathbf{g}-\mathbf{g}_2|_\mathbf{r}\,\mathbf{dx}$ *; porém, a curva y = $g_2(x)$ tem a mesma forma e o mesmo comportamento que a curva empírica g; ante uma tal situação, il a Gros à parier que o teórico preferirá considerar a teoria q_2 em lugar da teoria q_1; apesar de um erro quantitativo maior, pode-se pensar com efeito que a teoria q_2 que conduz à uma curva com o mesmo comportamento que a curva experimental g, pode revelar mais coisas acerca dos mecanismos subjacentes ao fenômeno que a teoria q_1 quantitativamente mais exata. Claramente, este exemplo não tem valor de demonstração: ilustra, contudo, a tendência natural do espírito em dar à forma de uma curva um valor intrínseco"*

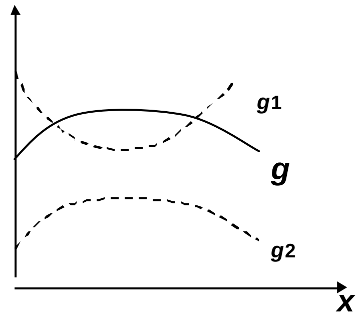

Figura 11

E no mesmo livro, René Thom acrescenta:

"Pode-se questionar se a importância atribuída pela Análise do século passado ao corpo complexo, e à teoria das funções analíticas não teve papel nefasto sobre a orientação das matemáticas. Admitindo-se a construção de uma doutrina extremamente bela que se adaptava, aliás, perfeitamente à concepção então triunfante do caráter quantitativo das leis físicas, ela negligenciou o aspecto real e qualitativo das coisas. ... Para todo fenômeno natural cuja evolução é governada por uma equação algébrica, assume importância primordial saber se esta equação tem soluções reais. Em ter ou não raízes, tal é a questão, questão que elimina precisamente o recurso aos números complexos. Como exemplos de situações nas quais a noção de realidade joga um papel qualitativo essencial, pode-se mencionar a realidade dos valores próprios de um sistema linear, o índice de um ponto crítico de uma função, o caráter elíptico ou hiperbólico de um operador diferencial".

O problema do estabelecimento de relações entre a quantidade e qualidade já era objeto de especulações dos filósofos da antiga Grécia. Assim, os pitagóricos foram os primeiros a privilegiar aquela primeira categoria imaginando que tudo podia ser representado por números inteiros positivos ou racionais positivos. Não causa estranheza, portanto, o grande reboliço ocasionado quando da descoberta de grandezas incomensuráveis, descoberta feita justamente por intermédio do famoso teorema de Pitágoras (569 – 500). Muitos historiadores da ciência acreditam que essa descoberta tenha provocado a maior crise do pensamento filosófico grego. Sobre a matemática de então, inegavelmente, ela provocou um grande golpe, exibindo determinadas impossibilidades algébricas como, exemplificando, a resolução de uma equação aparentemente tão simples como:

$$x^2 = 2$$

a qual não tem solução sem o recurso à existência de números irracionais. Quanto a Geometria de então, igualmente, sofreu o impacto na teoria da semelhança dentro da qual alguns teoremas eram demonstrados com base na existência de uma medida comum para lados paralelos de figuras semelhantes, cabendo a Eudoxo (408 – 355) a superação de tais dificuldades.

As transcrições que fizemos do eminente matemático francês contemporâneo René Thom sugerem a seguinte questão: no plano lógico qual das duas categorias (qualidade, quantidade) surgiu primeiro? Historicamente, o conhecimento do homem partiu da qualidade até à tomada de consciência da quantidade. Uma outra pergunta interessante é a seguinte; se, logicamente, a qualidade precede a quantidade, então, como explicar que a Análise Clássica – baseada no número – precedeu a Topologia – uma disciplina que, como já vimos, estuda as propriedades geométricas qualitativas, disciplina que, segundo Poincaré, baniu completamente a quantidade? Aliás, na história da matemática, outras perguntas desse mesmo tipo podem ser colocadas. Como sabemos, uma das primeiras idéias do homem refere-se à idéia de correspondência, isto é, de associação mental entre dois entes. A história da Matemática nos ensina que ela precedeu de muitos anos à idéia de número e de quantidade. Ora essa idéia recebeu seu maior impulso na Teoria dos Conjuntos de Cantor, teoria relativamente recente pois foi criada por Cantor (Georg Ferdinand Ludwig Phillpp, 1845 – 1918) a partir de 1872.

Parece que somos levados a admitir algumas premissas básicas como esta por exemplo: no conhecimento, o homem, às vezes, caminha em sentido contrário ao sentido desenvolvido pela realidade; nesta, verificamos, dado um determinado processo, que as mudanças quantitativas (a causa) produzem as mudanças qualitativas (os efeitos); no conhecimento, vamos da qualidade à quantidade, isto é, do efeito à causa. Parece que foi Aristóteles o primeiro a constatar este fato que tomamos como premissa; realmente, esse grande pensador da antiguidade asseverava que aquilo que vem inicialmente na realidade, surge por último no conhecimento, sendo a recíproca igualmente verdadeira, o primeiro no conhecimento é o último na realidade. Este é um tema de real importância quando se estuda o conhecimento matemático e no parágrafo seguinte continuará sendo desenvolvido.

6. Uma Digressão Epistemológica

Por onde deve começar os primeiros estudos matemáticos de uma criança? Pela tabuada, isto é, deve-se partir da noção de número? Neste caso não estaremos admitindo o número como um dado a priori? Será que o pensamento matemático logo a partir de seu início deve ser constituído sobre a noção de número? Podemos concordar com o matemático alemão Leopold Kronecker (1823 – 1891) quando escreve que: "Os números naturais foram feitos por Deus, todo o resto é obra dos homens?" É verdade que as "intuições" geométricas que serviram de base à Geometria de Euclides, são "coisas" a priori? Todos concordamos que as crianças não pensam e não sentem de maneira igual aos adultos; logo, é razoável concluir que elas, também, não enxergam o mundo como os adultos, isto é elas possuem percepções e representações do real bem diferentes daquelas experimentadas pelos adultos. Como são essas percepções e representações? São euclidianas? São topológicas? Por exemplo, no universo das crianças existem inicialmente, ângulos, distâncias, simetrias? Enfim, as primeiras aquisições da criança são métricas ou topológicas? Muitos didatas da Matemática falam que se devem ser ensinadas às crianças, primeiramente, as "noções elementares" dessa ciência como, exemplificando, segundo eles, as noções de número e medida. Serão tais noções realmente elementares? Será que as grandes dificuldades surgidas no ensino da Matemática não se originam do engano de serem consideradas como elementares noções que precisaram de um longo período de construção?

O rol de perguntas acima poderia ser prolongado. Neste trabalho estamos preocupados apenas com aquelas que apresentem alguma relação com a Topologia. Por exemplo: a criança adquire primeiro as noções topológicas e depois as métricas, ou o processo vai da aquisição primeiro das propriedades métricas para as propriedades topológicas? Raciocinemos juntos: - se o mundo da criança é diferente do mundo do adulto e, se o universo deste é "mais métrico" do que topológico – no sentido de que nenhum adulto sem formação matemática aceita ser o círculo, por exemplo, equivalente ao quadrado – é natural supor que o mundo da criança não é métrico – no sentido de que a criança, inicialmente, faz "confusão", por exemplo, entre o losango e o quadrado. Esta tese, qual seja de as primeiras noções serem topológicas, precedendo assim, às métricas, é definida por Piaget e suas implicações no ensino da Matemática são notáveis. A primeira delas e provavelmente a mais importante é a seguinte: noções que os matemáticos consideram como elementares como a de número, por exemplo, precisaram de um longo período para ser construída pela criança; as assim chamadas noções espaciais: conservação de distâncias, dimensões e outras intuições geométricas, igualmente, não podem ser noções elementares. <u>A geometria da criança não é a de</u> Euclides; a sua intuição geométrica é mais topológica do que euclidiana e sua representação topológica se prolonga dos três aos sete anos aproximadamente.

Muitas mães pobres, a fim de “enganar” seus filhos na faixa etária citada, costumam espalhar a comida (que é muito pouca) no prato, dando-lhes a ilusão de mais comida. Muitos de nós ficamos confusos quando, nessa mesma idade perguntavam: que é que pesa mais, um quilograma de algodão ou um quilograma de chumbo? Este estágio se caracteriza, pois, pela variância e somente no estágio seguinte, que vai até aos onze anos aproximadamente, é que a criança constrói suas invariâncias ou conservações, respondendo corretamente às perguntas do tipo acima formuladas. Obviamente que a construção de conservação de quantidade, de peso, de volume, etc., precede à “noção elementar” de número. Ademais, a construção da conservação pela criança não é arbitrária seguindo uma determinada ordem (por exemplo, a invariância da quantidade precede à do peso). Analisemos a seguinte experiência: por água em um copo A e depois despeja-las em outro copo B, mais fino e mais comprido; em qual dos dois copos há mais água? Agora, a criança, já de posse da conservação de volume responderá: os dois volumes de água são iguais. Importa sublinhar o seguinte: para atingir ao resultado correto a criança raciocina: se eu derramar a água de B em A, o nível desta em A voltaria a ser o mesmo. Temos aí aquilo que alguns psicólogos denominam de operação, isto é, uma ação mental reversível. Neste estágio a criança começa a construir a seriação e a classificação. Com a aquisição da seriação ela é capaz de ordenar objetos de tamanhos diferentes, ou seja, organiza-os em série crescente ou decrescente. Vejamos o problema colocado por Piaget: sejam 10 continhas de madeira, 3 vermelhas e 7 azuis; existem mais continhas de madeira azuis ou continhas vermelhas? A resposta correta exige a aquisição da noção de classificação e pode ser “visualizada” através do diagrama de Euler Venn:

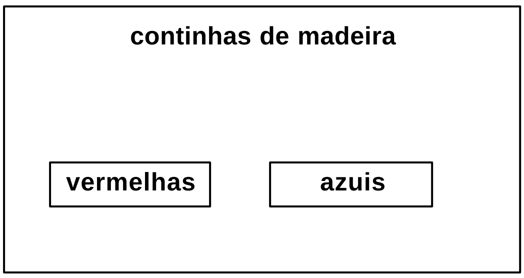

Figura 12

Veja como esse problema envolve noções de inclusão, classe ou categoria. Citemos, agora, o trecho de Piaget extraído de Seis Estudos de Psicologia(5).

---

[5] Vide bibliografia in fine

> *"Quanto à construção do número, ela ocorre na mesma idade (7 / 8 anos) em sua forma operatória. Até 6 / 7 anos (nas crianças de Genebra), já existem números "figurados" para as mesmas coleções, mas sem as características de conservação, próprias à operação. Por exemplo, depois de ter colocado seis fichas vermelhas em correspondência, termo a termo, com seis fichas azuis (no começo ela se limita a construir uma fileira do mesmo comprimento, sem correspondência), bastará comprimir ou espaçar uma das coleções para que o sujeito de 5 / 6 anos não creia mais na equivalência. Por volta dos 7 anos, ao contrário, constrói-se a seqüência dos números, graças às operações que consistem simultaneamente em adicionar, de maneira inclusiva (classe), e em ordenar (seriação) com a operação inversa; a primeira fornece a conservação do todo, e a seriação fornece o meio de distinguir uma unidade seguinte. O número inteiro pode ser, assim, concebido como síntese de classe e da relação assimétrica (ordem), de onde vem seu caráter simultaneamente ordinal e cardinal. A maior parte dos resultados que nós publicamos sobre este assunto, com A. Szeminska, em 1940 (Piaget e Szeminska, La gênese du nombre chezle enfant Delachaux et Niestlé, 1940) foram confirmados pelo também psicólogo infantil soviético M. Koustiouk, de Kiev".*

Intimamente relacionado com a geometria espontânea da criança – fundamentada em noções topológicas – podemos considerar o problema da construção do espaço, mencionando mais uma vez Piaget (1969). No ponto de partida da evolução mental, não existe, certamente, nenhuma diferenciação entre o eu e o mundo exterior, isto é, as impressões vividas e percebidas não são relacionadas nem à consciência pessoal sentida como um "eu" nem a objetos concebidos como exteriores. São simplesmente dados em um bloco indissociado, ou como que expostos sobre um mesmo plano, que não é nem interno e externo, mas meio caminho entre esses dois pólos. Estes só se oporão um ao outro pouco a pouco. Ora, por causa dessa indissociação primitiva, tudo que é percebido é centralizado sobre a própria atividade. O eu, no início, está no centro da realidade, porque é inconsciente de si mesmo e à medida que se constrói como uma realidade interna ou subjetiva o mundo exterior vai-se objetivando. Em outras palavras, a consciência começa por um egocentrismo inconsciente e integral, até que os progressos da inteligência senso-motora levem à construção de um universo objetivo, onde o próprio corpo aparece como elemento entre outros, e ao qual se opõe a vida interior, localizada neste corpo. Quatro processos fundamentais caracterizam esta revolução intelectual realizada durante os dois primeiros anos de existência: são as construções de categorias do objeto e do espaço, da causalidade e do tempo, todas quatro naturalmente a título de categorias práticas ou de ação pura e não ainda como noções do pensamento. "Complementando este trecho referente à construção do espaço, transcrevemos outro trecho desse eminente pensador, o qual consta no livro Espaço e Ciências Humanas, de Tonino Bettanini": os tratados elementares de geometria são quase unânimes em nos apresentar as noções espaciais de base como repousando em intuições euclidianas: retas, ângulos, quadrados e círculos, medida, etc. Esta opinião parece de fato confirmada pelo estudo da percepção e das "boas formas" visíveis ou táteis. Mas, por outro lado, a análise abstrata dos estudiosos de geometria tende a demonstrar que as noções espaciais fundamentais não são euclidianas: são topológicas, isto é, repousam simplesmente em correspondências qualitativas bicontínuas fazendo apelo aos conceitos de vizinhança e de separação, de desenvolvimento e de ordem, etc., mas ignoram toda conservação das distâncias como também toda projeção. Agora nós iremos constatar com precisão e continuidade que o espaço do menino, cuja natureza é ativa e operativa, fundamenta-se a partir das intuições topológicas elementares, muito antes de tornar simultaneamente prospectivo e euclidiano[6].

Concordamos inteiramente com Tonino Bettanini quando sublinha que para Piaget, o espaço vai-se construindo gradativamente, sendo a relação espacial mais elementar resultante da noção de vizinhança. Veja o caráter construtivo do espaço: partindo de noções bem elementares (separação, vizinhança) progride até novas construções como o espaço euclidiano, projetivo, etc., até o conceito moderno de espaço introduzido por Descartes ao criar a Geometria Analítica, na qual relaciona as curvas do plano e as equações algébricas com duas incógnitas. Um longo caminho ou melhor, uma longa construção vai do primeiro espaço primitivo ao conceito moderno dessa categoria. Basta lembrar que, o princípio da incerteza de Heisenberg, o conceito de trajetória deixa de existir na mecânica quântica e, segundo Landau, conseqüentemente, não há espaço para o elétron. De fato, a característica da trajetória de uma partícula é dada pela sua posição a todo instante e sua impulsão, isto é, devemos conhecer a qualquer instante os valores de x e de dx/dt – o que não é possível de acordo com a relação de incerteza. Não tendo trajetória é como se o elétron estivesse "fora" do espaço.

Finalmente, desejamos sublinhar – nesse problema da construção do espaço – o seguinte fato típico a todo processo de conhecimento humano: iniciando-se na ação, sem qualquer matriz teórica, o conhecimento vai apossando-se de novas construções, sem nunca atingir uma construção terminal; é como se o conhecimento fosse se espiralando, constituindo-se em um grande sistema aberto.

7. Considerações Gerais

[6] Conf. PIAJET, J. e INHELLDER, B. LA REPRESENTACION DE 18 ESPACE CHEZ L'ENFANT. PARIS, PUF, 1972, P. 5

A Topologia, embora sendo um dos ramos mais recentes da Matemática, assume uma importância cada vez mais crescente na investigação dos segredos da natureza. Na Física contemporânea o seu papel é de destaque.

Sendo uma geometria, a Topologia estuda figuras situadas no espaço; mais precisamente, ela estuda as propriedades dessas figuras que permanecem invariantes quando elas, as figuras, são submetidas a uma transformação topológica. Assim, para um círculo suas propriedades características são o interior e o exterior, por exemplo, quando o encaramos como uma curva fechada simples de Jordan. Com isto queremos dizer que a propriedade topológica fundamental do círculo é a de dividir um plano em <u>um</u> interior e <u>um</u> exterior. Como esta divisão acontece igualmente com o quadrado, o losango e o triângulo (há mais figura geométrica nessa situação...) dizemos, então, que elas são equivalentes, do ponto de vista da Topologia, com o círculo, o qual é equivalente topologicamente a qualquer uma de suas infinitas deformações, desde que, em nenhuma dessas deformações se verifique fusões de pontos ou rompimentos, isto é, qualquer uma dessas deformações seja uma transformação topológica.

É interessante observar que numa transformação topológica, propriedades métricas podem ser destruídas, persistindo, porém, as propriedades que são objeto da Topologia; esta permanência dá um caráter de maior profundidade às propriedades topológicas em relação às métricas.

O estudo feito até agora foi predominantemente intuitivo; em seguida, ele deverá ser prolongado, porém, com os recursos de outras disciplinas matemáticas quando, então, iremos aos poucos formalizando os conceitos introduzidos com apelo à intuição.

Referências

[1] COURANT, Richard e ROBBINS. Qué es la Matemática? Madrid, Aguilar, 1955, 534 p.[1]

[2] ALEKSANDROV, A. D., KOLMOGOROV et alli. La Matemática: su contenido, métodos y significado. Madrid, Alianza Universidad, 1976, 3 volumes.[2]

[3] POINCARÉ, Henri. La Valeus de la science. Paris, Flammarion, 1970, 190 p.[3]

[4] THOM, René. Stabilité Structurelle et morphogénese. Paris. Inter Editions, 1977, 351 p.[4]

[5] BETTANINI, Tonino. Espaço e Ciências humanas. Rio de Janeiro, Paz e Terra, 1982, 157 p.[5]

[6] PIAGET, Jean. Seis Estudos de Psicologia. Rio de Janeiro, Forense, 1969, 151 p.[6]

Notas

[1] Excelente livro de leitura indispensável aos professores de Matemática. O capítulo V é sobre Topologia. O tratamento inicial de qualquer assunto é intuitivo, o que não impede o alcance do rigor necessário. É uma obra – acreditamos – já traduzida na maior parte do mundo, (no Brasil ainda não foi traduzida).

[2] Obra escrita por eminentes matemáticos soviéticos. Pretende dar uma visão global da Matemática dentro de um enfoque não simplesmente técnico, porém, histórico e filosófico. No volume 3, estuda: Teoria das funções de uma variável real, Álgebra Linear, Geometrias não euclidianas, Topologia, Análise Funcional, Grupos e outros sistemas algébricos. O tratamento é marcadamente intuitivo, acompanhado, naturalmente, de alguns comentários filosóficos.

[3] A obra é dividida em três partes. A primeira parte é reservada às ciências matemáticas, a segunda às ciências físicas e a terceira, ao valor objetivo da ciência. O tratamento é informal. Na página 59 ele apresenta intuitivamente a Geometria Qualitativa (Topologia) de uma maneira bastante acessível. Tratando-se de uma obra não propriamente técnica, os assuntos tratados trazem a marca de suas idéias filosóficas: combatendo os formalistas e logicistas ele às vezes se aproxima de Brouwer, como intuicionista, porém, não abandona as teses do seu convencionalismo. Advoga a necessidade da postulação de um princípio não formal (a indução matemática) como um dos alicerces básicos da Matemática.

[4] Trata-se de um belíssimo livro bem no espírito desse eminente francês. Grande parte de seus modelos são inspirados na Biologia. As citações mencionadas por nós no texto foram extraídas das páginas 4 e 37. Os modelos matemáticos são acompanhados de digressões filosóficas.

[5] Estudo da formação do espaço e seus variados domínios: social, geográfico, psicológico, mítico, etc.

[6] Estuda o desenvolvimento mental da criança, a formação do pensamento lógico e suas analogias com as estruturas matemáticas. A teoria desse eminente sábio suíço sobre a construção das estruturas operatórias lógico – matemáticas são, no mínimo, interessantes.

Sobre o(a) autor(a) –

Carloman Carlos Borges – Doutor em Matemática, é Professor Titular aposentado do Departamento de Exatas da UEFS, atualmente presta serviços de Consultoria ao NEMOC; Feira de Santana – BA.